

4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ταυτότητα της διαίρεσης

$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$, όπου $\upsilon(x)$ είναι ή το μηδενικό πολυώνυμο ή βαθμός $\upsilon(x) < \text{βαθμός } \delta(x)$

$\Delta(x)$ διαιρετέος

$\delta(x)$ διαιρέτης

$\pi(x)$ πηλίκο

$\upsilon(x)$ υπόλοιπο

Αν $\upsilon(x) = 0$ τότε $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x)$ **τέλεια διαίρεση**.

2.

Θεώρημα

Το υπόλοιπο της διαίρεσης πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ ισούται με την τιμή του $P(x)$ για $x = \rho$, δηλαδή είναι $\upsilon = P(\rho)$.

3.

Θεώρημα

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$, αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Περιορισμός

Κάθε διαιρέτης είναι μη μηδενικό πολυώνυμο.

2.

Ταυτόσημες εκφράσεις

- « η διαίρεση του $P(x)$ με το $\delta(x)$ είναι τέλεια »
- « η διαίρεση του $P(x)$ με το $\delta(x)$ δίνει υπόλοιπο μηδέν »
- « το $\delta(x)$ διαιρεί το $P(x)$ »
- « το $\delta(x)$ είναι παράγοντας του $P(x)$ »
- « το $P(x)$ διαιρείται από το $\delta(x)$ »
- « το $P(x)$ έχει παράγοντα το $\delta(x)$ »

3.

Μέθοδος

Η πράξη της διαίρεσης, αν θέλουμε, αντικαθίσταται με την ταυτότητα της διαίρεσης.

4.

Μέθοδος

Όταν ο διαιρέτης είναι της μορφής $x - \rho$:

- i) Θα είναι $v(x) = v$ (σταθερό πολυώνυμο)
- ii) Ο βαθμός του πηλίκου $\pi(x)$ θα είναι κατά 1 μονάδα μικρότερος του βαθμού του διαιρετέου $\Delta(x)$.
- iii) Θέτουμε όπου x το ρ

5.

Μέθοδος

Όταν ο διαιρέτης δεν είναι της μορφής $x - \rho$:

εργαζόμαστε με την ταυτότητα της διαίρεσης, χρησιμοποιώντας γενική μορφή των πολυωνύμων.

6.

Μέθοδος

Όταν ο διαιρέτης είναι της μορφής $(x - \rho_1)(x - \rho_2)$ ή $(x - \rho)^2$:

- i) Θα είναι $v(x) = ax + \beta$ (δηλαδή βαθμού το πολύ 1)
- ii) Δύο φορές ταυτότητα της διαίρεσης (στο διαιρετέο και στο πηλίκο).
- iii) Θέτουμε διαδοχικά όπου x τα ρ_1, ρ_2 .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο $x + 1$ είναι παράγοντας του $P(x) = x^3 - x^2 + 2$

Προτεινόμενη λύση

Είναι $x + 1 = x - (-1)$

$u = P(-1) = -1 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow$ το -1 είναι ρίζα του $P(x)$
 οπότε το $x + 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$

2.

Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε διαιρούμενο με το $2x^2 - 3$ να δίνει πηλίκο $5x + 6$ και υπόλοιπο $3x + 1$.

Προτεινόμενη λύση

Σύμφωνα με την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (2x^2 - 3)$ έχουμε

$$P(x) = (2x^2 - 3)(5x + 6) + 3x + 1$$

$$P(x) = 10x^3 + 12x^2 - 15x - 18 + 3x + 1$$

$$P(x) = 10x^3 + 12x^2 - 12x - 17$$

Σχόλιο 3

3.

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = 6\kappa x^3 - 4\kappa\lambda x^2 + (\lambda^2 - 2\kappa)x + 5\kappa^2 + 4$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τα κ, λ , αν το $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Πρέπει και αρκεί } P(1) = 0 \Leftrightarrow 6\kappa - 4\kappa\lambda + \lambda^2 - 2\kappa + 5\kappa^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 + 5\kappa^2 - 4\kappa\lambda + 4\kappa + 4 = 0$$

$$\lambda^2 + 4\kappa^2 - 4\kappa\lambda + \kappa^2 + 4\kappa + 4 = 0$$

$$(\lambda - 2\kappa)^2 + (\kappa + 2)^2 = 0$$

$$\lambda - 2\kappa = 0 \text{ και } \kappa + 2 = 0$$

$$\lambda = 2\kappa \text{ και } \kappa = -2$$

$$\lambda = -4 \text{ και } \kappa = -2$$

4.

Με την βοήθεια μόνο του σχήματος Horner να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$ έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του πολυωνύμου $\Sigma(x) = x^2 - 5x + 6$ και να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : \Sigma(x)$

Προτεινόμενη λύση

Οι ρίζες του τριωνύμου $\Sigma(x)$ είναι 2 και 3 $\Rightarrow \Sigma(x) = (x - 2)(x - 3)$

Σχήμα Horner για $\rho = 2$

1	-5	5	5	-6	2
	2	-6	-2	6	
1	-3	-1	3	0	

Άρα $P(x) = (x - 2)(x^3 - 3x^2 - x + 3)$ **(1)**

Σχήμα Horner για $\rho = 3$

1	-3	-1	3	3
	3	0	3	
1	0	-1	0	

Άρα $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 3)(x^2 - 1)$

Οπότε η (1) γίνεται $P(x) = (x - 2)(x - 3)(x^2 - 1) = \Sigma(x)(x^2 - 1)$

Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι τα $x - 2$, $x - 3$ είναι παράγοντες του $P(x)$ και το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : \Sigma(x)$ είναι $\pi(x) = x^2 - 1$.

5.

Να βρείτε τα α και β ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = x^3 - (\alpha - \beta)x^2 - x + 1$ με το $x + 1$ να είναι 4, ενώ η διαίρεση του $K(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + \beta x^2 - \alpha + 5\beta + 2$ με το $x - 1$ να είναι τέλεια.

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}
 \text{Πρέπει } \begin{cases} P(-1)=4 \\ K(1)=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -1-(\alpha-\beta)+1+1=4 \\ 1-2\alpha+\beta-\alpha+5\beta+2=0 \end{cases} \\
 &\begin{cases} -\alpha+\beta=3 \\ -3\alpha+6\beta=-3 \end{cases} \\
 &\begin{cases} \alpha=\beta-3 \\ -\alpha+2\beta=-1 \end{cases} \\
 \begin{cases} \alpha=\beta-3 \\ 3-\beta+2\beta=-1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\beta-3 \\ \beta=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-4-3=-7 \\ \beta=-4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

6.

Να βρείτε τα κ, λ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa - 1)x^3 + 2(\lambda + 1)x^2 - \lambda x + 3$ να διαιρείται με το $x + 2$ και το $B(x) = 2\kappa x^2 + (\lambda + 1)x - 4$ να έχει παράγοντα το $x - 1$.

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 2

$$\begin{aligned} \text{Πρέπει } \begin{cases} P(-2)=0 \\ B(1)=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\kappa-1)(-2)^3 + 2(\lambda+1)(-2)^2 - \lambda(-2) + 1 = 0 \\ 2\kappa + (\lambda+1) - 4 = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} (\kappa-1)(-8) + 8(\lambda+1) + 2\lambda + 1 = 0 \\ 2\kappa + \lambda - 3 = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} -8\kappa + 8 + 8\lambda + 8 + 2\lambda + 1 = 0 \\ \lambda = 3 - 2\kappa \end{cases} \\ &\begin{cases} -8\kappa + 10\lambda + 17 = 0 \\ \lambda = 3 - 2\kappa \end{cases} \\ &\begin{cases} -8\kappa + 10(3 - 2\kappa) + 17 = 0 \\ \lambda = 3 - 2\kappa \end{cases} \\ &\begin{cases} -8\kappa + 30 - 20\kappa + 17 = 0 \\ \lambda = 3 - 2\kappa \end{cases} \\ &\begin{cases} -28\kappa = -47 \\ \lambda = 3 - 2\kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = \frac{47}{28} \\ \lambda = 3 - 2\frac{47}{28} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = \frac{47}{28} \\ \lambda = -\frac{5}{14} \end{cases} \end{aligned}$$

7.

Να αποδείξετε ότι οι διαιρέσεις των πολυωνύμων $A(x) = x^2 + x^8 + 5x^4 + 2x^2 + 1$ και $B(x) = -x^6 - 3x^4 - 5$ με οποιοδήποτε πολυώνυμο της μορφής $x - \rho$ δεν είναι τέλειες

Προτεινόμενη λύση

$$v_1 = A(\rho) = \rho^{12} + \rho^8 + 5\rho^4 + 2\rho^2 + 1 > 0 \quad \text{αφού οι εκθέτες του } \rho \text{ είναι άρτιοι} \Rightarrow$$

η διαίρεση του $A(x)$ με το $x - \rho$ δε μπορεί να είναι τέλεια.

$$\text{Ομοίως } v_2 = B(\rho) = -\rho^6 - 3\rho^4 - 5 = -(\rho^6 + 3\rho^4 + 5) < 0$$

8.

Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης πολωνύμου $P(x)$ με το $2x - 3$ είναι ίσο με $P\left(\frac{3}{2}\right)$

Προτεινόμενη λύση

Η ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (2x - 3)$ είναι

Σχόλιο 3

$$P(x) = (2x - 3)\pi(x) + \upsilon \quad (1)$$

$$\text{Για } x = \frac{3}{2} \quad \eta \quad (1) \Rightarrow P\left(\frac{3}{2}\right) = \left(2 \cdot \frac{3}{2} - 3\right) \cdot \pi\left(\frac{3}{2}\right) + \upsilon$$

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \cdot \pi\left(\frac{3}{2}\right) + \upsilon$$

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = \upsilon$$

9.

Να βρεθεί το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x) = x^3 - 3x^2 - 5x - 1$ με το $x - 2$.

Προτεινόμενη λύση

$$\upsilon = P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 1 = 8 - 12 - 10 - 1 = -15$$

$$\text{Ταυτότητα της διαίρεσης : } x^3 - 3x^2 - 5x - 1 = (x - 2)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) - 15$$

Σχόλιο 4

$$x^3 - 3x^2 - 5x - 1 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - 2\alpha x^2 - 2\beta x - 2\gamma - 15$$

$$x^3 - 3x^2 - 5x - 1 = \alpha x^3 + (\beta - 2\alpha)x^2 + (\gamma - 2\beta)x - (2\gamma + 15)$$

$$\alpha = 1 \text{ και } \beta - 2\alpha = -3 \text{ και } \gamma - 2\beta = -5 \text{ και } 2\gamma + 15 = 1$$

$$\alpha = 1 \text{ και } \beta - 2 \cdot 1 = -3 \text{ και } \gamma - 2\beta = -5 \text{ και } \gamma = -7$$

$$\alpha = 1 \text{ και } \beta = -1 \text{ και } \gamma - 2(-1) = -5 \text{ και } \gamma = -7$$

$$\alpha = 1 \text{ και } \beta = -1 \text{ και } \gamma = -7 \text{ και } \gamma = -7$$

$$\text{Άρα } \pi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = x^2 - x - 7$$

Άλλοι τρόποι είναι

α) Σχήμα Horner

β) Εκτέλεση της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$

10.

Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $x - 2$ δίνει υπόλοιπο 3 και με το $x + 2$ δίνει υπόλοιπο 1, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - 4$.

Προτεινόμενη λύση

Η ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$ είναι

$$P(x) = (x^2 - 4)\pi(x) + v(x), \text{ όπου } v(x) = \kappa x + \lambda \quad (1)$$

Σχόλιο 5

Για $x = 2$ η (1) $\Rightarrow P(2) = 2\kappa + \lambda$

Όμως από υπόθεση είναι $P(2) = 3$ Άρα $2\kappa + \lambda = 3 \quad (2)$

Για $x = -2$ η (1) $\Rightarrow P(-2) = -2\kappa + \lambda$

Πάλι από υπόθεση είναι $P(-2) = 1$ Άρα $-2\kappa + \lambda = 1 \quad (3)$

Σύστημα των (2), (3): $\kappa = \frac{1}{2}, \quad \lambda = 2$

(1) $\Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}x + 2$

11.

Έστω πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$P(2x + 1) + P(2x) = x^2 + 2x - 1$$

Αν το $P(x)$ έχει ρίζα το 0 να δείξετε ότι δεν έχει ρίζα το 1.

Προτεινόμενη λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $P(1) \neq 0$

Η δοσμένη συνθήκη για $x = 0 \Rightarrow P(1) + P(0) = -1$

Όμως από υπόθεση είναι $P(0) = 0$, οπότε $P(1) = -1 \neq 0$

άρα το 1 δεν είναι ρίζα του $P(x)$.

12.

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 2$ είναι 3, να βρείτε

το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(3x + 5) + x - 6$ με το $x + 1$.

Λύση

Από υπόθεση έχουμε ότι $P(2) = 3$.

Έστω $K(x) = P(3x + 5) + x - 6 \quad (1)$

Τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης $K(x) : (x + 1)$ είναι $v = K(-1)$.

Όμως για $x = -1$ η (1) $\Rightarrow K(-1) = P(-3 + 5) - 1 - 6$

$$K(-1) = P(2) - 7$$

και επειδή $P(2) = 3$ βρίσκουμε ότι $K(-1) = -4$. Οπότε $v = -4$

13.

Έστω το πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε $P(x) = P(1-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Δείξτε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(x) - P(0)$ έχει σαν παράγοντες όλους τους παράγοντες του $x^2 - x$.

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Είναι } x^2 - x = x(x-1)$$

$$\text{Η υπόθεση } Q(x) = P(x) - P(0), \text{ για } x = 0 \Rightarrow Q(0) = P(0) - P(0) = 0$$

Άρα το x είναι παράγοντας του $Q(x)$

$$\text{Η υπόθεση } Q(x) = P(x) - P(0), \text{ για } x = 1 \Rightarrow Q(1) = P(1) - P(0) \quad (1)$$

$$\text{Η υπόθεση } P(x) = P(1-x), \text{ για } x = 1 \Rightarrow P(0) = P(1)$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} Q(1) = 0$$

Άρα το $x-1$ είναι παράγοντας του $Q(x)$

14.

Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ 2^{ου} βαθμού, έτσι ώστε να ισχύουν
 $P(0) = 0$ και $P(x) = 4x + P(x-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $P(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ το ζητούμενο πολυώνυμο.

$$P(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

$$\text{Η } P(x) = 4x + P(x-2) \text{ για } x = 0 \Rightarrow P(0) = P(-2)$$

$$0 = a(-2)^2 + b(-2) + \gamma$$

$$0 = 4a - 2b + 0$$

$$2a - b = 0 \quad (1)$$

$$\text{Η } P(x) = 4x + P(x-2) \text{ για } x = 2 \Rightarrow P(2) = 8 + P(0)$$

$$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 0 = 8 + 0$$

$$4a + 2b = 8$$

$$2a + b = 4 \quad (2)$$

$$\text{Σύστημα των (1), (2) } \Rightarrow a = 1 \text{ και } b = 2$$

$$\text{Άρα } P(x) = x^2 + 2x$$

15.

Έστω τα πολυώνυμα $P(x) = 2x^2 - 1$, $Q(x) = 3x - 1$ και $F(x) = 3ax^2 + 2\beta x + \gamma - \alpha$

Να βρείτε τα α , β , γ ώστε να ισχύει $P(Q(x-1)) = F(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

Από την υπόθεση $Q(x) = 3x - 1 \Rightarrow Q(x-1) = 3(x-1) - 1 = 3x - 4$ **(1)**

Από την υπόθεση $P(Q(x-1)) = F(x+1) \xRightarrow{(1)}$

$$P(3x-4) = F(x+1) \Rightarrow$$

$$2(3x-4)^2 - 1 = 3a(x+1)^2 + 2\beta(x+1) + \gamma - \alpha$$

$$2(9x^2 - 24x + 16) - 1 = 3a(x^2 + 2x + 1) + 2\beta x + 2\beta + \gamma - \alpha$$

$$18x^2 - 48x + 32 - 1 = 3ax^2 + 6ax + 3a + 2\beta x + 2\beta + \gamma - \alpha$$

Ίσα
πολυώνυμα

$$18x^2 - 48x + 31 = 3ax^2 + (6a + 2\beta)x + 2a + 2\beta + \gamma$$

$$3a = 18 \quad \text{και} \quad 6a + 2\beta = -48 \quad \text{και} \quad 2a + 2\beta + \gamma = 31$$

$$a = 6 \quad \text{και} \quad 6 \cdot 6 + 2\beta = -48 \quad \text{και} \quad 2 \cdot 6 + 2\beta + \gamma = 31$$

$$a = 6 \quad \text{και} \quad \beta = -42 \quad \text{και} \quad 12 - 84 + \gamma = 31$$

$$a = 6 \quad \text{και} \quad \beta = -42 \quad \text{και} \quad \gamma = 103$$

16.

Να βρείτε τα κ και λ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (2\kappa - 1)x^2 + (\lambda - 1)x + 2$ να έχει παράγοντα το $(x-1)(x-2)$.

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $P(x) = (x-1)(x-2)\pi(x)$ **(1)**

Η (1) για $x = 1 \Rightarrow P(1) = 0$
 $1^3 + (2\kappa - 1)1^2 + (\lambda - 1)1 + 2 = 0$
 $1 + 2\kappa - 1 + \lambda - 1 + 2 = 0$
 $2\kappa + \lambda = -1$ **(2)**

Η (1) για $x = 2 \Rightarrow P(2) = 0$
 $2^3 + (2\kappa - 1)2^2 + (\lambda - 1)2 + 2 = 0$
 $8 + 8\kappa - 4 + 2\lambda - 2 + 2 = 0$
 $8\kappa + 2\lambda = -4$
 $4\kappa + \lambda = -2$ **(3)**

Λύνοντας το σύστημα των (2), (3) βρίσκουμε $\kappa = -\frac{1}{2}$, $\lambda = 0$.

17.

Έστω πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$P(P(x)+1) + 2P(x) = P(x+3) - 2x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν το $P(x)$ έχει παράγοντες τους x και $x-1$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-3$.

Προτεινόμενη λύση

Το ζητούμενο υπόλοιπο θα είναι ίσο με $P(3)$.

$$x \text{ παράγοντας του } P(x) \Rightarrow P(0) = 0$$

$$x-1 \text{ παράγοντας του } P(x) \Rightarrow P(1) = 0$$

$$\text{Η δοσμένη σχέση για } x=0 \Rightarrow P(P(0)+1) + 2P(0) = P(0+3) + 1$$

$$P(0+1) + 2 \cdot 0 = P(3) + 1$$

$$P(1) = P(3) + 1$$

$$0 = P(3) + 1$$

$$P(3) = -1$$

18.

Πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $x - 2$ δίνει υπόλοιπο 1 και διαιρούμενο με το $x^2 + 5x + 6$ δίνει υπόλοιπο $2x - 3$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x - 2)(x^2 + 5x + 6)$

Λύση

Από τις υποθέσεις είναι $P(2) = 1$ **(1)**

$$\text{και } P(x) = (x^2 + 5x + 6) \pi(x) + 2x - 3 \quad \textbf{(2)}$$

Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 5x + 6$ είναι -2 και -3

$$\begin{aligned} \text{Η (2) για } x = -2 &\Rightarrow P(-2) = 0 \cdot \pi(-2) + 2 \cdot (-2) - 3 \\ P(-2) &= -7 \quad \textbf{(3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Η (2) για } x = -3 &\Rightarrow P(-3) = 0 \cdot \pi(-3) + 2 \cdot (-3) - 3 \\ P(-3) &= -9 \quad \textbf{(4)} \end{aligned}$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)(x^2 + 5x + 6)$ είναι

$$P(x) = (x - 2)(x^2 + 5x + 6) \pi(x) + \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad \textbf{(5)}$$

$$\begin{aligned} \text{Η (5) για } x = 2 &\Rightarrow P(2) = \alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + \gamma \\ 1 &= 4\alpha + 2\beta + \gamma \quad \textbf{(A)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Η (5) για } x = -2 &\Rightarrow P(-2) = \alpha \cdot (-2)^2 + \beta \cdot (-2) + \gamma \\ -7 &= 4\alpha - 2\beta + \gamma \quad \textbf{(B)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Η (5) για } x = -3 &\Rightarrow P(-3) = \alpha \cdot (-3)^2 + \beta \cdot (-3) + \gamma \\ -9 &= 9\alpha - 3\beta + \gamma \quad \textbf{(Γ)} \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα των (A), (B), (Γ) βρίσκουμε $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\gamma = -3$.
Οπότε το ζητούμενο υπόλοιπο είναι το $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 2x - 3$

19.

Να βρείτε τις τιμές των κ και λ ώστε το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - (\kappa - 1)x^3 + \lambda x^2 - (2\lambda + \kappa)x + 3$$

να διαιρείται με το $(x - 1)^2$

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει $P(x) = (x - 1)\pi(x)$ και $\pi(x) = (x - 1)\pi'(x) \Leftrightarrow$
 $P(1) = 0$ **(1)** και $\pi(1) = 0$ **(2)**

Σχήμα Horner στο $P(x)$ και για $\rho = 1$, ώστε να έχουμε το $\pi(x)$ και το $P(1)$

1	$-\kappa + 1$	λ	$-2\lambda - \kappa$	3	1
	1	$-\kappa + 2$	$\lambda - \kappa + 2$	$-\lambda - 2\kappa + 2$	
1	$-\kappa + 2$	$\lambda - \kappa + 2$	$-\lambda - 2\kappa + 2$	$-\lambda - 2\kappa + 5$	

Οπότε $\pi(x) = x^3 + (-\kappa + 2)x^2 + (\lambda - \kappa + 2)x - \lambda - 2\kappa + 5$ και $P(1) = -\lambda - 2\kappa + 5$

Άρα $\pi(1) = 1^3 + (-\kappa + 2)1^2 + (\lambda - \kappa + 2)1 - \lambda - 2\kappa + 5$
 $= 1 + (-\kappa + 2) + (\lambda - \kappa + 2) - \lambda - 2\kappa + 5$
 $= 1 - \kappa + 2 + \lambda - \kappa + 2 - \lambda - 2\kappa + 5$
 $= -4\kappa + 10$

Οι (1) και (2) $\Leftrightarrow -\lambda - 2\kappa + 5 = 0$ και $-4\kappa + 10 = 0$

$$\lambda = 5 - 2\kappa \quad \text{και} \quad \kappa = \frac{5}{2}$$

$$\lambda = 5 - 2 \cdot \frac{5}{2} \quad \text{και} \quad \kappa = \frac{5}{2}$$

$$\lambda = 0 \quad \text{και} \quad \kappa = \frac{5}{2}$$

20.

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = -vx^{v+1} + (v+1)x^v + \alpha$

i) Να βρείτε το α ώστε το $P(x)$ να διαιρείται με το $x-1$.

ii) Για την τιμή του α που βρήκατε δείξτε ότι το $P(x)$ διαιρείται με το $(x-1)^2$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Για να διαιρείται το $P(x)$ με το $x-1$, θα πρέπει $P(1) = 0$
 $-v + v + 1 + \alpha = 0$
 $\alpha = -1$

Τότε $P(x) = -vx^{v+1} + (v+1)x^v - 1$

Σχόλιο 6

ii)

Για να διαιρείται τώρα το $P(x)$ με το $(x-1)^2$ αρκεί και

$\pi(1) = 0$, όπου $\pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x-1)$.

Με Horner βρίσκουμε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x-1)$

-v	v+1	0		0	0	-1	1
	-v	1		1	1	1	
-v	1	1		1	1	0	

Από το παραπάνω σχήμα έχουμε $\pi(x) = -vx^v + x^{v-1} + x^{v-2} + \dots + x + 1$

$$\pi(1) = -v + 1 + 1 + \dots + 1 + 1$$

Το πλήθος των μονάδων είναι v , δεδομένου ότι το $\pi(x)$ έχει συνολικά $v+1$ όρους.

Άρα $\pi(1) = -v + v = 0$.

Επομένως το $P(x)$ διαιρείται με το $(x-1)^2$.

21.

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 7x^2 - 8x$

- i) Να βρείτε όλους τους πρωτοβάθμιους παράγοντες του $P(x)$.
 ii) Αν $Q(x)$ πολυώνυμο βαθμού ≥ 3 , να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $Q(x)$ με το $P(x)$. Ποια η μορφή του υπολοίπου;
 iii) Αν ισχύουν $Q(0) = 3$, $Q(-1) = 2$, $Q(8) = 1$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(x) : P(x)$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$P(x) = x^3 - 7x^2 - 8x = x(x^2 - 7x - 8)$$

Οι ρίζες του τριώνυμου $x^2 - 7x - 8$ είναι το 8 και το -1.

$$\text{Οπότε } (x^2 - 7x - 8) = (x - 8)(x + 1) \quad \text{και} \quad P(x) = x(x - 8)(x + 1)$$

ii)

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι

$$Q(x) = (x^3 - 7x^2 - 8) \pi(x) + \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad (1)$$

Όπου $\pi(x)$ το πηλίκο και $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = v(x)$ το υπόλοιπο

iii)

$$\text{Από την (1)} \Rightarrow Q(0) = \gamma, \quad Q(-1) = \alpha - \beta + \gamma, \quad Q(8) = 64\alpha + 8\beta + \gamma$$

$$\text{Και από την υπόθεση} \quad \begin{cases} \gamma = 3 \\ \alpha - \beta + \gamma = 2 \\ 64\alpha + 8\beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

$$\text{Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε} \quad \alpha = -\frac{5}{36}, \quad \beta = \frac{31}{36}, \quad \gamma = 3$$

$$\text{Άρα } v(x) = -\frac{5}{36}x^2 + \frac{31}{36}x + \gamma.$$

22.

i) Δείξτε ότι :

Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $\Sigma(x)$ διαιρούμενα με το $A(x) \neq 0$, δίνουν το ίδιο υπόλοιπο αν και μόνο αν το $A(x)$ είναι παράγοντας της διαφοράς $P(x) - \Sigma(x)$

ii) Έστω $P(x) = ax^3 + 2x + 6$ και $\Sigma(x) = 2x^2 - 3$. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$, αν τα $P(x)$ και $\Sigma(x)$ διαιρούμενα με το $x + 2$ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.

Προτεινόμενη λύση

i)

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε

$$P(x) = A(x) \pi_1(x) + v_1(x), \quad \text{και} \quad \Sigma(x) = A(x) \pi_2(x) + v_2(x)$$

$$\text{Αφαιρώντας κατά μέλη} \Rightarrow P(x) - \Sigma(x) = A(x) \pi_1(x) + v_1(x) - A(x) \pi_2(x) - v_2(x)$$

$$P(x) - \Sigma(x) = A(x) [\pi_1(x) - \pi_2(x)] + v_1(x) - v_2(x) \quad (1)$$

Ευθύ : Όταν $v_1(x) = v_2(x)$.

$$\text{Η (1)} \Rightarrow P(x) - \Sigma(x) = A(x) [\pi_1(x) - \pi_2(x)]$$

το $A(x)$ είναι παράγοντας της διαφοράς $P(x) - \Sigma(x)$

Αντίστροφο : Όταν το $A(x)$ είναι παράγοντας της διαφοράς $P(x) - \Sigma(x)$.

Λόγω της μοναδικότητας του πηλίκου η

$$(1) \Rightarrow v_1(x) - v_2(x) = 0 \Rightarrow v_1(x) = v_2(x)$$

ii)

Με βάση το (i, αντίστροφο) έχουμε $P(x) - \Sigma(x) = (x + 2) \pi(x) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} & ax^3 + 2x + 6 - 2x^2 + 3 = (x + 2) \pi(x) \\ \text{Για } x = -2 & \Rightarrow a(-2)^3 + 2(-2) + 6 - 2(-2)^2 + 3 = 0 \\ & -8a - 4 + 9 - 8 = 0 \end{aligned}$$

$$-8a = 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{8}$$

Οπότε $P(x) = -\frac{3}{8}x^3 + 2x + 6$.